数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 174-184

U-統計量の線形結合に対する大偏差確率

鹿児島大学・理学部 大和 元 (Hajime Yamato)
Department of mathematics and computer science,
Kagoshima University

概要

推定可能な母数の推定量として、V- 統計量、LB-統計量を含む U-統計量の線形結合を考え、これに対する大偏差確率を、U-統計量に対する大偏差確率を基に、導く。

1 U-統計量の線形結合

次数 k の対称な kernel/核 $g(x_1,...,x_k)$ をもつ、分布 F の、estimable parameter/推定可能な母数 $\theta(F)$ の推定量として、

$$Y_n = \frac{1}{D(n,k)} \sum_{j=1}^{k} d(k,j) \binom{n}{j} U_n^{(j)} \tag{1.1}$$

を考える。これを Y-統計量と言う事にするが、それは次のように構成される：
$w(r_1,\dots,r_j;k)$ は $r_1+\cdots+r_j=k$ $(j=1,\dots,k)$ を満たす正の整数 $r_1,\dots,r_j$ について対称な非負の関数で、その少なくとも 1 つは正とする。各 $j=1,\dots,k$ について,

$$g_{(j)}(x_1,\dots,x_j) = \frac{1}{d(k,j)} \sum\nolimits^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k} w(r_1,\dots,r_j;k) g(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{r_1},\dots,\underbrace{x_j,\dots,x_j}_{r_j})$$

と置く。ここで、$\sum^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k}$ は $r_1+\cdots+r_j=k$ （j、k は固定）を満たす全ての正の整数 $r_1,...,r_j$ についての和で、$d(k,j)=\sum^{+}_{r_1+\cdots+r_j=k} w(r_1,\dots,r_j;k)$ （$j=1,2,...,k$）。$D(n,k)=\sum_{j=1}^{k} d(k,j)\binom{n}{j}$。 また、$j=1,\dots,k$ について、$U_n^{(j)}$ は核 $g_{(j)}(x_1,\dots,x_j;k)$ に対応する, 分布 F からの大きさ n の標本 $X_1,...,X_n$ に基づく、U-統計量 (例 (1) 参照) である。核 $g_{(j)}(x_1,\dots,x_j;k)$ は $w(r_1,\dots,r_j;k)$ の対称性から、対称である。ある j_0 に対して、$d(k,j_0)=0$ の時には, 対応する $U_n^{(j_0)}=0$ とする。(Toda and Yamato (2001))。この Y-統計量は特別な場合として、従来の良く知られた U-統計量、 V-統計量等を含む：
例（1）重み w として $w(1,1,\dots,1;k)=1$、且つ $j=1,\dots,k-1$ 及び $r_1+\cdots+r_j=k$ を満たす正整数 $r_1,\dots,r_j$ に対して、$w(r_1,\dots,r_j;k)=0$ で与えられるものを考える。この時、(1.1) で与えられる Y-統計量は次で与えられる U-統計量になる。

$$U_n = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} g(X_{j_1},\dots,X_{j_k}).$$

例（2）重み w として, $j=1,\ldots,k$ 及び $r_1+\cdots+r_j=k$ を満たす全ての正整数 $r_1,\ldots,r_j$ に対して、$w(r_1,\ldots,r_j;k)=1$ で与えられるものを考える。この時、(1.1) で与えられる Y-統計量は次で与えられる B-統計量になる。

$$B_n=\binom{n+k-1}{k}^{-1}\sum_{r_1+\cdots+r_n=k} g(\underbrace{X_1,\ldots,X_1}_{r_1},\ldots,\underbrace{X_n,\ldots,X_n}_{r_n}),$$

例（3）重み w として, $j=1,\ldots,k$ 及び $r_1+\cdots+r_j=k$ を満たす正整数 $r_1,\ldots,r_j$ に対して、$w(r_1,\ldots,r_j;k)=k!/(r_1!\cdots r_j!)$ で与えられるものを考える。この時、(1.1) で与えられる Y-統計量は次で与えられる V-統計量になる。

$$V_n=\frac{1}{n^k}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} g(X_{j_1},\ldots,X_{j_k}).$$

例（4）重み w として, $j=1,\ldots,k$ 及び $r_1+\cdots+r_j=k$ を満たす正整数 $r_1,\ldots,r_j$ に対して、$w(r_1,\ldots,r_j;k)=k!/(r_1\cdots r_j)$ で与えられるものを考える。特に $k=3$ の場合で3次の中心モーメントについては、対応する Y-統計量は

$$S_n=\frac{n}{n^2+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^3,$$

但し $\bar{X}$ は $X_1,\ldots,X_n$ の算術平均である (Nomachi et al. (2002))。

2　U-統計量に対する大偏差確率

$\sigma^2=Var\big(g(X_1,\ldots,X_k)\big)>0$ とし、$m=[n/k]$ とおく。$[x]$ は x を越えない最大整数である。

Lemma 2.1 (Serfling (1980, p.201)) 定数 a と b に対して、$a\le g(x_1,\ldots,x_k)\le b$ が成り立つものとする。このとき、$t>0$ 及び $n\ge k$ に対して,

$$P(U_n-\theta\ge t)\le \exp\Big(-\frac{2mt^2}{(b-a)^2}\Big) \tag{2.1}$$

および

$$P(U_n-\theta\ge t)\le \exp\left(-\frac{mt^2}{2\big(\sigma^2+\frac{1}{3}(b-a)t\big)}\right). \tag{2.2}$$

漸近的には、(2.1) と (2.2) はそれぞれ、次の関係を与える；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(U_n-\theta\ge t)\le -\frac{2t^2}{k(b-a)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(U_n-\theta\ge t)\le -\frac{t^2}{2k\big(\sigma^2+\frac{1}{3}(b-a)t\big)}.$$

Markov の不等式により、$P((U_n-\theta\ge t)=P(e^{s(U_n-\theta-t)}\ge 1)$, $s>0$ が得られ、これから

$$P(U_n-\theta\ge t)\le E[e^{s(U_n-\theta-t)}]\quad(\quad s>0). \tag{2.3}$$

不等式 (2.1) 次のようにして導かれる：(2.3) の右辺は $e^{Q(s)}$ $(s>0)$ より小さいか等しい。但し、 $Q(s)=(b-a)^2s^2/(8m)-st$。$Q(s)$ の $s>0$ における最小値は (2.1) の右辺で与えられる (参照, Serfling (1980, p. 201)). 上の証明の方法から、(2.1) は次に同値である；

$$\inf_{s>0}E[e^{s(U_n-\theta-t)}]\le\Big(-\frac{2mt^2}{(b-a)^2}\Big). \tag{2.4}$$

同様に、 (2.2) は次に同値である；

$$\inf_{s>0}E[e^{s(U_n-\theta-t)}]\le\exp\left(-\frac{mt^2}{2\big(\sigma^2+\frac{1}{3}(b-a)t\big)}\right). \tag{2.5}$$

Lemma 2.2 (Christofides (1991)) (a) 定数 $M>0$ があって、$E\mid g(X_1,\dots,X_k)-\theta\mid^r\le r!\sigma^2M^{r-2}/2$ $(r=2,3,\dots)$ が成り立つものとする。この時、 $t>0$ に対して、

$$P(U_n-\theta\ge t)\le\exp\Big(-\frac{m}{2M^2}\big(\sqrt{2tM+\sigma^2}-\sigma\big)^2\Big). \tag{2.6}$$

(b) 定数 a と b に対して、$a\le g(x_1,\dots,x_k)\le b$ と仮定する。この時、 $t>0,$ に対して、

$$P(U_n-\theta\ge t)\le\exp\left(-\frac{9m}{2(b-a)^2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}t(b-a)+\sigma^2}-\sigma\right)^2\right). \tag{2.7}$$

漸近的には、(2.1) と (2.2) はそれぞれ、次の関係を与える；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(U_n-\theta\ge t)\le-\frac{1}{2kM^2}\big(\sqrt{2tM+\sigma^2}-\sigma\big)^2$$

および

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(U_n-\theta\ge t)\le-\frac{9}{2k(b-a)^2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}t(b-a)+\sigma^2}-\sigma\right)^2.$$

$g(x_1,\dots,x_k)$ について、次の様におく；

$$\psi_l(x_1,\dots,x_l)=E\big(g(X_1,\dots,X_k)\mid X_1=x_1,\dots,X_l=x_l\big),\quad l=1,...,k.$$

$l=2,3,...,k$ について,

$$g^{(1)}(x_1)=\psi_1(x_1)-\theta,$$

$$g^{(l)}(x_1,\ldots,x_l)=\psi_l(x_1,\ldots,x_l)-\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le l}g^{(i)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_i})-\theta.$$

仮定 $\sigma_1^2=Var(\psi_1(X_1))>0$. $\Phi(x)$ ：標準正規分布関数。
$\Phi(x)$ については

$$1-\Phi(x\pm(\ln n)^{-2})=\big(1-\Phi(x)\big)\Big(1+o\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big) \tag{2.8}$$

が $-A\le x\le c\sqrt{\ln n}$ 上で一様に成り立つ。但し、 $A\ge 0$ 且つ $c>0$ (Vandemaele and Veraverberke (1982)).

Lemma 2.3 (Vandemaele and Veraverberke (1982), Lemma 1)
(a) $p>2+c^2$ $(c>0)$ を満たすある p について、 $E\mid g(X_1,\ldots,X_k)\mid^p<\infty$ と仮定する。この時、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>x\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\Big(1+o\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big) \tag{2.9}$$

が、 $-A\le x\le c\sqrt{\ln n}$ で一様に成り立つ、ここで $A\ge 0$.
(b) 全ての $p=1,2,\cdots$ に対して $E\mid g(X_1,\ldots,X_k)\mid^p<K^p p^{\gamma p}$ とする。但し、 K と $\gamma\ge 0$ は p に依存しない定数である。この時、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>x\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\big(1+o(1)\big) \tag{2.10}$$

が $-A\le x\le o(n^\alpha)$ で一様に成り立つ。但し、$A\ge 0$ 且つ $\alpha=1/\{2(3+2\gamma)\}$.

命題 (a) については次の条件の下でも示されている。

Lemma 2.4 (Borovskikh(1996))

$$E\mid g^{(1)}(X_1)\mid^p<\infty,\quad p>2+c^2$$

及び

$$E\mid g^{(l)}(X_1,\ldots,X_l)\mid^{c_l+c^2}<\infty,\quad l=2,\ldots,k,$$

とする。但し、 $c_l=2l/(2l-1)$ で、 $c>0$ はある定数。この時、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>x\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\Big(1+o\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big)$$

が $-A\le x\le c\sqrt{\ln n}$ で一様に成り立つ。但し、$A\ge 0$。

特別な場合として、

Lemma 2.5 (Borovskikh(1996)) *Lemma* 2.4 の条件の下で,

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>c\sqrt{\ln n}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi c^2\ln n}}n^{-\frac{c^2}{2}}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big).$$

3 Y-統計量に対する大偏差確率

$j=1,\dots,k$ に対して、

$$\theta_j = E\big(g_{(j)}(X_1,\dots,X_j)\big),$$
$$\sigma^2_{(j)} = Var\big(g_{(j)}(X_1,\dots,X_j)\big),$$
$$\tau^2 = \max\{\sigma^2_{(1)},\dots,\sigma^2_{(k)}\}$$

と置く。なお、

$$\theta_k = \theta, \quad \sigma^2_{(k)} = \sigma^2.$$

Theorem 3.1 (Yamato (2002)). 定数 a と b に対して、$a \le g(x_1,\dots,x_k) \le b$ が成り立つものとする。このとき、 $t>0$ 及び $n \ge k$ に対して,

$$P(Y_n - EY_n \ge t) \le \exp\Big(-\frac{2mt^2}{(b-a)^2}\Big) \tag{3.1}$$

及び

$$P(Y_n - EY_n \ge t) \le \exp\Bigg(-\frac{mt^2}{2\big(\tau^2+\frac{1}{3}(b-a)t\big)}\Bigg). \tag{3.2}$$

証明 $s>0$ に対して、

$$P(Y_n - EY_n \ge t) \le P(e^{s(Y_n - EY_n \ge t)} \ge 1) \le E(e^{s(Y_n - EY_n - t)})$$
$$= E\exp\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{d(k,j)}{D(n,k)}\binom{n}{j}s(U_n^{(j)}-\theta_j-t)\Big).$$

$d(k,j)/D(n,k))\binom{n}{j}$ は $j=1,\cdots,k$ 上の確率関数と見なせるので, Jensen's inequality を最後の項に適用して、

$$P(Y_n - EY_n \ge t) \le \sum_{j=1}^{k}\frac{d(k,j)}{D(n,k)}\binom{n}{j}E(e^{s(U_n^{(j)}-\theta_j-t)}), \quad s>0. \tag{3.3}$$

$a \le g_{(j)} \le b$ 且つ $E(U_n^{(j)}) = \theta_j$ $(j=1,\dots,k)$ であるから, (2.3) を上式の右辺に用い、$m=[n/k] \le [n/j]$ $(j=1,\dots,k)$ により,

$$\inf_{s>0} E(e^{s(U_n^{(j)}-\theta_j-t)}) \le \exp\Big(-\frac{2\big[\frac{n}{j}\big]t^2}{(b-a)^2}\Big) \le \exp\Big(-\frac{2mt^2}{(b-a)^2}\Big).$$

これを (3.3) の右辺に用いて, $D(n,k)=\sum_{j=1}^{n} d(k,j)\binom{n}{j}$ により (3.1) が得られる。
(2.4) を (3.3) の右辺の期待値に用い、また $m \le [n/j]$ と $\tau^2 \ge \sigma_j^2$ $(j=1,\dots,k)$ により,

$$\inf_{s>0} E(e^{s(U_n^{(j)}-\theta_j-t)}) \le \exp\Bigg(-\frac{\big[\frac{n}{j}\big]t^2}{2\big(\sigma^2_{(j)}+\frac{1}{3}(b-a)t\big)}\Bigg) \le \exp\Bigg(-\frac{mt^2}{2\big(\tau^2+\frac{1}{3}(b-a)t\big)}\Bigg).$$

この評価を (3.3) の右辺に用いて, (3.2) が得られる。 □

(3.3) と同様にして、次が得られる、

$$P(Y_n - \theta \geq t) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{d(k,j)}{D(n,k)} \binom{n}{j} E(e^{s(U_n^{(j)} - \theta_j - t)}) e^{s(\theta_j - \theta)}, \quad s > 0.$$

右辺の中の項 $E(e^{s(U_n^{(j)} - \theta_j - t)})$ についてのみ、先ず、$s > 0$ 上の inf で評価する（左辺は s に依存せず、(3.3) 直後の不等式から）。

$$P(Y_n - \theta \geq t) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{d(k,j)}{D(n,k)} \binom{n}{j} \exp\Big(- \frac{2mt^2}{(b-a)^2} \Big) e^{s(\theta_j - \theta)}, \quad s > 0.$$

右辺の $s > 0$ は任意であるから、$s = 1$ とおいて $M = \max_{1 \leq j \leq k} e^{\theta_j - \theta}$ と置くことにより、

$$P(Y_n - \theta \geq t) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{d(k,j)}{D(n,k)} \binom{n}{j} M \exp\Big(- \frac{2mt^2}{(b-a)^2} \Big) \leq M \exp\Big(- \frac{2mt^2}{(b-a)^2} \Big).$$

これより、漸近的には、(3.1) に対応して、次が言える；

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(Y_n - \theta \geq t) \leq - \frac{2t^2}{k(b-a)^2}$$

同様に、(3.2) に対応して、次が言える；

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(Y_n - \theta \geq t) \leq - \frac{t^2}{2k\big(\tau^2 + \frac{1}{3}(b-a)t\big)}.$$

Theorem 3.2 (Yamato (2002)). (a) ある定数 $M > 0$ があって、 $j = 1, \ldots, k$ 及び $r = 2, 3, \ldots$ に対して $E \mid g_{(j)}(X_1, \ldots, X_j) - \theta_j \mid^r \leq r!\sigma^2 M^{r-2}/2$ が成り立つものとする。この時、 $t > 0$ に対して,

$$P(Y_n - EY_n \geq t) \leq \exp\Big(- \frac{m}{2M^2} (\sqrt{2tM + \tau^2} - \tau)^2 \Big). \tag{3.4}$$

(b) 定数 a 及び b に対して、$a \leq g(x_1, \ldots, x_k) \leq b$ が成り立つものとする。このとき、$t > 0$ に対して、

$$P(Y_n - EY_n \geq t) \leq \exp\Bigg(- \frac{9m}{2(b-a)^2} \Big(\sqrt{\frac{2}{3} t(b-a) + \tau^2} - \tau \Big)^2 \Bigg). \tag{3.5}$$

証明 U-統計量は独立で同一分布に従う確率変数の平均の平均として表される (例えば, Serfling (1980, p.180) and Borovskikh (1996, p.14))。平均がゼロ、分散 $\sigma^2 > 0$ で、$E(X^r) \leq r!\sigma^2 M^{r-2}/2$ ($r = 2, 3, \ldots$) を満たす確率変数 X に対して、その積率母関数に対して次が成り立つ；

$$E(e^{sX}) \leq \exp\{\sigma^2 s^2 / [2(1 - sM)]\}\ ; (0 < s < 1/M)$$

この2つの事から, 次が示される； $j=1,\dots,k$ に対して、

$$Ee^{s(U_n^{(j)}-\theta_j-t)}\le \exp\Big(-st+\frac{\sigma_j^2s^2}{2([\frac{n}{j}]-sM)}\Big),\quad 0<s<\frac{m}{M}\Big(\le\frac{[\frac{n}{j}]}{M}\Big),$$

(Christofides (1991, p.258–259)). $m\le[n/j]$ 且つ $\tau^2\ge\sigma_j$ $(j=1,\dots,k)$ であるから,

$$Ee^{s(U_n^{(j)}-\theta_j-t)}\le \exp\Big(-st+\frac{\tau^2s^2}{2(m-sM)}\Big),\quad 0<s<\frac{m}{M}.$$

よって、(3.3) により

$$P(Y_n-EY_n\ge t)\le \exp\Big(-st+\frac{\tau^2s^2}{2(m-sM)}\Big),\quad 0<s<\frac{m}{M}.$$

$y=m-sM(>0)$ とおくと, 右辺の指数部分は次の等しい；

$$\frac{1}{2M^2}\Big(\frac{\tau m}{\sqrt{y}}-\sqrt{(2tM+\tau^2)y}\Big)^2+\frac{m}{M^2}\Big(\sqrt{2tM+\tau^2}\cdot\tau-(tM+\tau^2)\Big).$$

この関数の $y>0$ 上の最小値は 第2項で与えられ、それは (3.4) の右辺の指数部分に等しい。

条件 (b) の下で, 条件 (a) は $M=(b-a)/3$ で満たされる (Christofides (1991, p.259)). 従って、不等式 (3.5) は、(3.4) で M の代わりに $(b-a)/3$ を代入して、得られる。 □

漸近的には、(3.4) と (3.5) はそれぞれ、次の関係を与える；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(Y_n-\theta\ge t)\le-\frac{1}{2kM^2}\big(\sqrt{2tM+\sigma^2}-\sigma\big)^2$$

および

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(Y_n-\theta\ge t)\le-\frac{9}{2k(b-a)^2}\Big(\sqrt{\frac{2}{3}t(b-a)+\sigma^2}-\sigma\Big)^2.$$

Theorem 3.3 (Yamato (2002)). (a) ある $p>2+c^2$ $(c>0)$ に対して、$E\mid g(X_1,\dots,X_k)\mid^p<\infty$ 及び $E\mid g(X_{j_1},\dots,X_{j_k})\mid^{p-2}<\infty$, $1\le j_1\le\cdots\le j_k\le k$, が成り立つものとする。この時、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(Y_n-\theta)>x\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\Big(1+o\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big)\tag{3.6}$$

$-A\le x\le c\sqrt{\ln n}$ で一様に成り立つ。但し、$A\ge 0$。

(b) 全ての $p=1,2,\cdots$ に対して、$E\mid g(X_{j_1},\dots,X_{j_k})\mid^p<K^pp^{\gamma p}$, $1\le j_1\le\cdots\le j_k\le k$, が成り立つものと仮定する。但し、$K$ は $\gamma\ge 0$ p に依存しない定数である。このとき、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(Y_n-\theta)>x\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\big(1+o(1)\big)\tag{3.7}$$

が $-A\le x\le o(n^\alpha)$ $(A\ge 0)$ で一様に成り立つ。ここで、$\alpha=1/\{2(3+2\gamma)\}$。

$d(k,k) = w(1,\dots,1;k) > 0$ とすると, 定数 $\beta(\geq 0)$ があって

$$\frac{d(k,k)}{D(n,k)}\binom{n}{k} = 1 - \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{3.8}$$

及び

$$\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d(k,j)}{D(n,k)}\binom{n}{j} = \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2}). \tag{3.9}$$

U-statistic U_n については, $\beta = 0$. Theorem 3.3 (b) の証明では,

$$\beta > 0,$$

とする。U-統計量については Section 2 に与えられている。V-統計量 V_n と S-統計量 S_n については, $\beta = k(k-1)/2$。LB-統計量 B_n については, $\beta = k(k-1)$。また、次の関係が成り立つ。

$$Y_n = U_n + R_n$$

ここで、$r > 0$ 及び整数 $j_1,\dots,j_k$ に対して、

$$E \mid g(X_{j_1},\dots,X_{j_k}) \mid^r < \infty$$

ならば

$$E \mid R_n \mid^r \leq \frac{C_1}{n^r}, \tag{3.10}$$

(Toda and Yamato (2001)).

Theorem 3.3 の証明 $Y_n - \theta = U_n - \theta + R_n$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n - \theta) > x + \varepsilon\Big) - P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1} \mid R_n \mid > \varepsilon\Big) \\ \leq P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(Y_n - \theta) > x\Big) \qquad (3.11)\\ \leq P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n - \theta) > x - \varepsilon\Big) + P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1} \mid R_n \mid > \varepsilon\Big). \end{aligned}$$

が成り立つ。

まず、(3.6) を示す。Markov の不等式と (3.10) により、$\varepsilon = (\ln n)^{-2}$ に対して、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1} \mid R_n \mid > \varepsilon\Big) \leq C_2\frac{(\ln n)^{2(p-2)}}{n^{(p-2)/2}}, \tag{3.12}$$

但し、$C_2(>0)$ は定数である。大きな $x > 0$ について, $1 - \Phi(x) \approx (\sqrt{2\pi}x)^{-1}e^{-x^2/2}$ が成り立つ (例えば, Johnson et al. (1994))。これより、$-A \leq x \leq c\sqrt{\ln n}$ に対して, $1/\big(1-\Phi(x)\big) \leq O((\ln n)^{1/2}n^{c^2/2})$。この関係と (3.12) 及び $p - c^2 > 2$ により,

$$\frac{P(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1} \mid R_n \mid > \varepsilon)}{1 - \Phi(x)} = O\Big(\frac{(\ln n)^{2(p-2)+1/2}}{n^{(p-2-c^2)/2}}\Big).$$

従って、次をが得られる、

$$\frac{P\left(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}\mid R_n\mid>\varepsilon\right)}{1-\Phi(x)}=o\left((\ln n)^{-1}\right). \tag{3.13}$$

一方、(2.9) により、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>x\pm\varepsilon\Big)=\big(1-\Phi(x\pm\varepsilon)\big)\Big(1+o\big((\ln n)^{-1})\big)\Big).$$

$\varepsilon=(\ln n)^{-2}$ とし、(2.8) を用いて、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>x\pm\varepsilon\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\Big(1+o\big((\ln n)^{-1})\big)\Big). \tag{3.14}$$

(3.13) と (3.14) を (3.11) に用いて, (3.6) を得る。
次に、(3.7). を示す。g についてのモーメントの条件から,

$$\big(E\mid U_n^{(j)}\mid^p\big)^{1/p}\le Kp^\gamma,\quad j=1,\ldots,k.$$

故に、(3.8), と (3.9) 及び Minkowski の不等式により,

$$\{E\mid R_n\mid^p\}^{1/p}\le Kp^\gamma\Big(\frac{2\beta}{n}+O\big(\frac{1}{n^2}\big)\Big).$$

よって、$p=1,2,\ldots$ について、

$$E\mid\sqrt{n}R_n\mid^p\le(2\beta K)^pn^{-p/2}p^{p\gamma+1}\Big(1+O\big(\frac{1}{n}\big)\Big).$$

Markov の不等式により, $\varepsilon=n^{-\alpha}$ と $p=cn^{(1-2\alpha)/(2+2\gamma)}$ $(\alpha=1/\{2(3+2\gamma)\})$ に対して、

$$P(\mid\sqrt{n}R_n\mid\ge\varepsilon)\le O\Big(\big(2\beta Kn^{\alpha-\frac{1}{2}}p^\gamma\big)^p\cdot p\Big)=O\Big(e^{p[\ln(2\beta K)-\ln p]+\ln p}\Big) \tag{3.15}$$

p_n を $p_n\to0$ 及び $p_nn^\alpha\to\infty$ を満たす正の数列とする。この時、最初に述べたのと同じ理由で、$1/\big(1-\Phi(p_nn^\alpha)\big)\approx\sqrt{2\pi}p_nn^\alpha e^{p_n^2n^{2\alpha}/2}$。処で、$\varepsilon=n^{-\alpha}$, $p=cn^{(1-2\alpha)/(2+2\gamma)}$ 及び $\alpha=1/\{2(3+2\gamma)\}$, であるから

$$\frac{P\left(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}\mid R_n\mid>\varepsilon\right)}{1-\Phi(p_nn^\alpha)}=O\bigg(p_n\exp\Big(\ln c+n^{2\alpha}\big(\frac{p_n^2}{2}+C_3-(2\alpha c-\frac{3\alpha}{n^{2\alpha}})\ln n\big)\Big)\bigg).$$

$\alpha c>0$ であるから、右辺の指数部分は $n\to\infty$ の時 $-\infty$ に発散する。但し、C_3 は c と β 及び K に依存する定数である。故に、右辺は $n\to\infty$ の時、0 に収束する。かくして、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}\mid R_n\mid>n^{-\alpha}\Big)=(1-\Phi(x))\cdot o(1) \tag{3.16}$$

が $-A\le x\le o(n^\alpha)$ で、一様になりたつ。十分小さい $\varepsilon>0$ に対して、(2.10) により、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(U_n-\theta)>x\pm\varepsilon\Big)=(1-\Phi(x\pm\varepsilon))(1+o(1)).$$

大きな$x>0$に対する近似$1-\Phi(x)\approx(\sqrt{2\pi}x)^{-1}e^{-x^2/2}$を用いて、

$$1-\Phi(x\pm n^{-\alpha})=(1-\Phi(x))(1+o(1)) \tag{3.17}$$

が$-A\le x\le o(n^{\alpha})$で一様に成り立つ（(3.16)と同様な方法で示す事が出来る。）故に、(3.16)と(3.17)を(3.11)へ用いて, (3.7)が得られる。 □
次のCorollaryでR_nへの条件はTherem 3.3 (a)のそれと同じであるから、Lemma 2.4により(a)は次のように言い換えられる。

Corollary 3.4 (Yamato (2002)). ある定数$c>0$及び$p>2+c^2$があって、

$$E\mid g(X_{j_1},\ldots,X_{j_k})\mid^{p-2}<\infty,\quad (1\le j_1\le\cdots\le j_k\le k),\quad p>2+c^2,$$

及び

$$E\mid g^{(1)}(X_1)\mid^{p}<\infty,\quad p>2+c^2,$$

と

$$E\mid g^{(l)}(X_1,\ldots,X_l)\mid^{c_l+c^2}<\infty,\quad l=2,\ldots,k,$$

が成り立つものとする。ここで、$c_l=2l/(2l-1)$。このとき、

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(Y_n-\theta)>x\Big)=\big(1-\Phi(x)\big)\Big(1+o\big(\frac{1}{\ln n}\big)\Big)$$

が$-A\le x\le c\sqrt{\ln n}$で一様に成り立つ。ここで、$A\ge 0$.

上に、$1-\Phi(c\sqrt{\ln n})=(2\pi c^2\ln n)^{-1/2}n^{-c^2/2}(1+O((\ln n)^{-1}))$を用いて、次が得られる。

Corollary 3.5 (Yamato (2002)). Corollary 3.4の条件の下で,

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{k\sigma_1}(Y_n-\theta)>c\sqrt{\ln n}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi c^2\ln n}}n^{-\frac{c^2}{2}}\Big(1+O\big(\frac{1}{\ln n}\big)\Big).$$

参考文献

[1] Borovskikh, Yu.V. (1996), *U-statistics in Banach spaces*, VSP, Utrecht.

[2] Christofides, T. S. (1991), Probability inequalities with exponential bounds for U-statistics, *Statist. Prob. Letters*, **12**, 257–261.

[3] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994), *Continuous univariate distributions*, Vol. 1, 2nd ed., John Wiley, New York.

[4] Nomachi, T. , Kondo, M. and Yamato, H. (2002), Higher order efficiency of linear combinations of U-statistics as estimators of estimable parameters, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, (online, **6**, 95–106.)

[5] Serfling, R. J. (1980), *Approximation theorems of mathematical statistics*, John Wiley and Sons, New York.

[6] Toda, K. and Yamato, H. (2001). Berry-Esseen bounds for some statistics including LB-statistic and V-statistic. *J. Japan Statist. Soc.*, **31**, No. 2, 225–237.

[7] Vandemaele, M. and Veraverbeke, N. (1982), Cramér type large deviations for linear combinations of order statistics, *Ann. Prob.*, **10**, 423–434.

[8] Yamato, H. (2002), Large deviations for a linear combination of U-statistics, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, (online, **7**, 189–197.)